Réduction des endomorphismes normaux.

Leçon : 151, 153, 154, 160, 158, (155), (161)

Réf: J-E. Rombaldi, Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.

Soit E un espace Euclidien de dimension $n \geq 1$.

Lemme 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si F est un sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration

Si $F \in \{\{0\}, E\}$ alors $F^\perp \in \{E, \{0\}\}$ donc c'est vrai. On suppose donc que $n \geq 2$ et $1 \leq \dim F \leq n-1$.

Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$. Comme F est stable par u, on a $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ avec les colonnes $\underbrace{}_{F}$ $\underbrace{}_{F^\perp}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = A^T = \begin{pmatrix} A_1^T & 0 \\ A_2^T & A_3^T \end{pmatrix}$

(on voit que $F^\perp$ est stable par u^*).

Or u est normal donc $AA^T = A^TA$.

D'une part : $AA^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^T & 0 \\ A_2^T & A_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_1^T + A_2A_2^T & A_2A_3^T \\ A_3A_2^T & A_3A_3^T \end{pmatrix}$

D'autre part : $A^TA = \begin{pmatrix} A_1^T & 0 \\ A_2^T & A_3^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^TA_1 & A_1^TA_2 \\ A_2^TA_1 & A_2^TA_2 + A_3^TA_3 \end{pmatrix}$

Ainsi : $\mathrm{Tr}(A_1A_1^T + A_2A_2^T) = \mathrm{Tr}(A_1^TA_1)$, et $\mathrm{Tr}(A_1A_1^T + A_2A_2^T) = \mathrm{Tr}(A_1^TA_1) + \mathrm{Tr}(A_2A_2^T)$.

Donc $\mathrm{tr}(A_2A_2^T) = 0 \iff A_2 = 0$. Donc $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$: $F^\perp$ stable par u.

□

Lemme 2 Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un sev P de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Démonstration

- Si u a une valeur propre réelle λ, alors si x est un $\vec{vp}$ associé à λ, la droite $\mathbb{R}x$ est stable par u ($u(tx) = t\,u(x) = \underset{\in\mathbb{R}}{t\lambda}\, x$).
- Sinon, $n \geq 2$, et le polynôme minimal π_u de u se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ comme produit de polynômes de degré 2. Ainsi $\pi_u(X) = (X^2 + bX + c)\,Q(X)$ avec :
  - $b^2 - 4c < 0$ (pas de racines dans $\mathbb{R}$)
  - $Q(u) \neq 0$: π_u polynôme unitaire de + petit degré annulant u.

$\pi_u(u) = 0$, donc $(u^2 + bu + c\,\mathrm{Id}) \circ Q(u) = 0$, donc $u^2 + bu + c\,\mathrm{Id}$ n'est pas bijectif, ie $\mathrm{Ker}(u^2 + bu + c\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$. Soit x un vecteur non nul de ce noyau. On note $P := \mathrm{Vect}\{x, u(x)\}$. Alors $\dim P = 2$ ($x \notin \vec{vp}(u)$) et P stable par u car $u^2(x) = -bu(x) - cx \in P$.

□

Lemme 3 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe des sev de E, $P_1, \dots, P_r$, avec $\dim P_i \in \{1,2\}$, deux à deux orthogonaux, stables par u, tels que $E = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$.

Démonstration

Par récurrence sur $n \geq 1$ la dimension de E.

I- $n \in \{1,2\}$, c'est évident ($P_1 = E$).

H- Soit $n \geq 3$. On suppose le résultat vrai pour tout endo. normal d'un espace de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$.

Soit P_1 un sev de E stable par u, tq $\dim P_1 = 1$ ou $\dim P_1 = 2$. Cet espace est donné par le lemme 2.

Alors, comme u est normal, $P_1^\perp$ est stable par u (lemme 1).

De plus $1 \leq n-2 \leq \dim P_1^\perp \leq n-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe $P_2, \dots, P_r$ deux à deux $\perp$, sev de E, stable par u tq $P_1^\perp = \bigoplus_{i=2}^{r} P_i$.

Alors $E = P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_1^\perp = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i$.

□

Lemme 4 Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien F de dimension 2.

- Si u a une vp réelle, alors u est diagonalisable en bon.
- Sinon, pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de F, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration

- Si u a une vp réelle $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Il existe $e_1 \in F \setminus \{0\}$, unitaire, tel que $u(e_1) = \lambda e_1$. $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u, donc il existe e_2 unitaire, $e_2 \perp e_1$, et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq $u(e_2) = \lambda_2 e_2$. Ainsi $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u)$ est diagonale.
- Soit $\mathcal{B}$ une bon de F, et $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose que A est sans vp réelle. u est normal donc $AA^T = A^TA$.

D'une part : $AA^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$.

D'autre part : $A^TA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+dc \\ ab+dc & b^2+d^2 \end{pmatrix}$.

donc $$\begin{cases} a^2+b^2 = a^2+c^2 \\ b^2+d^2 = c^2+d^2 \\ ac+bd = ab+dc \\ ab+dc = ac+bd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \pm c \\ \\ (a-d)(b-c) = 0 \end{cases}$$

Si $b = 0$, alors $c = 0$ et A diagonale : contradiction.

Si $b=c$: alors A est symétrique, or $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -b & X-d \end{vmatrix} = X^2-(a+d)X+ad-b^2$.
et $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-b^2) = (a-d)^2+4b^2 > 0$. $(b \neq 0)$.
Donc χ_A scindé à racines simples → A diagonalisable, contradiction.

Si $\underset{\neq 0}{b=-c}$, $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$, cqfd.

car $(a-d)(b-c)=0$

$\Rightarrow (a-d)\underset{\neq 0}{c}=0$

$\Rightarrow a=d$

□

Théorème 5 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & 0 \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_r \end{pmatrix}$$

où : . D_p matrice diagonale d'ordre p

. $\forall k \in [\![1,r]\!]$: R_k est de la forme $\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ et $b_k \in \mathbb{R}^*$.

. $p+2r=n$.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$. (récurrence forte).

. $n \leq 2$: ok par le lemme 4.

. On suppose le résultat vrai pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$. Montrons le pour n.

Si u admet une vp réelle λ_1, alors en notant e_1 un $\vec{vp}$ unitaire associé à λ_1 : $u(e_1)=\lambda_1 e_1$, l'espace-vectoriel $H_1 := (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est de dimension $n-1$, est stable par u. Donc par HR, il existe $\mathcal{B}_1$ une bon de H_1 tq

$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{|H_1}) = \begin{pmatrix} D_p & & & \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix}$. La base $\{e_1\} \cup \mathcal{B}_1$ convient alors.

$\text{Mat}_{\{e_1\}\cup\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} \underline{\begin{matrix} \lambda_1 & \\ & D_p \end{matrix}} \to \text{diagonale} & & & \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix}$

Sinon, $E = \bigoplus_{k=1}^{r} P_k$ (lemme 3) avec P_k des plans vectoriels stables par u, 2 à 2 orthogonaux. Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{r} \underbrace{\mathcal{B}_k}_{\hookrightarrow \text{ bon de } P_k}$ une base orthonormée adaptée à cette décomposition.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_k \end{pmatrix}$ de la forme voulue. □